# Álgebra I
# Examen XIII


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Álgebra I
# Examen XIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

David Sánchez Muñoz

Granada, 2025

**Asignatura** Álgebra I.

**Curso Académico** 2024-2025.

**Grado** Doble Grado Informática-Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** María Pilar Carrasco Carrasco.

**Descripción** Examen Ordinario.

**Fecha** 21 de enero de 2025.

**Duración** 3 horas.

**Ejercicio 1** (2,5 puntos)**.** Demostrar:

1. (1,25 puntos) Todo DI en el que todo elemento no nulo ni unidad es producto de irreducibles y todo irreducible es primo, es un DFU.

2. (1,25 puntos) Sea $R$ una relación de equivalencia definida en un conjunto $S$, entonces para cualesquiera $a, b \in S$,

$$aRb \iff [a] = [b].$$

**Ejercicio 2** (2,5 puntos)**.** Dado el sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

$$\begin{cases} x \equiv 1 + 2\sqrt{-2} & \pmod{2 - 3\sqrt{-2}} \\ x \equiv 3 & \pmod{1 + \sqrt{-2}} \end{cases}$$

1. Demostrar que tiene solución sin resolverlo.

2. Resolverlo, dando una solución óptima y la solución general.

3. ¿Es posible encontrar una solución cuya parte real sea $a = 3$? En caso afirmativo, describir todas ellas.

**Ejercicio 3** (2,5 puntos)**.** Factorizar en el anillo $\mathbb{Z}[x]$, y en $\mathbb{Q}[x]$ como producto de irreducibles mónicos, los dos siguientes polinomios:

1. (1,25 puntos) $6x^7 + 30x^6 + 6x^2 + 36x + 30$.

2. (1,25 puntos) $3x^6 - 4x^5 + 49x^4 - 64x^3 + 16x^2 + 3x - 1$.

**Ejercicio 4** (2,5 puntos)**.**

1. (0,75 puntos) En el anillo $\mathbb{Z}_7[x]$ calcular el resto de dividir $x^{1321} + 5$ entre el polinomio $x + 3$.

2. (1,75 puntos) Sea $\alpha = 1 + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ y sea

$$I = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(\alpha) = 0\}$$

   Demostrar que $I$ es un ideal no nulo de $\mathbb{Q}[x]$.

   Encontrar un polinomio $h \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $I = h\mathbb{Q}[x]$, el ideal principal generado por $h$.